

АКАДЕМИЯ НАУК СССР



ОРДЕНА ЛЕНИНА

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени П. Н. Лебедева

Отдел теоретической физики им. И. Е. Тамма

Препринт № 179

Физика Космоса

Б. П. Кондратьев

**ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИК**

Москва — 1978

DYNAMICS OF GALACTIC MODELS AND THEIR SHAPES

Dynamical properties of possible forms of Elliptical Galaxies - oblate spheroids and 3-axis ellipsoids - are investigated. Independently from Binney (1978) it is deduced that the oblateness of elliptical Galaxies reflects overall anisotropy of star velocity dispersion. For anisotropic models the value of anisotropy is 3 to 5 times less than that of Binney. Arguments in favour of the existence of oblate and prolate galaxies are presented.

ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИК

Б.П.Кондратьев

Аннотация

Исследованы динамические свойства возможных форм эллиптических галактик - сжатого сфероида и трехосного эллипсоида. Независимым от Бинни (1978) способом сделан вывод о том, что сплюснутость эллиптических галактик отражает глобальную анизотропию дисперсии скоростей звезд. Для анизотропных моделей величина анизотропии в 3-5 раз меньше установленной Бинни. Рассмотрено и аргументировано предположение о существовании сжатых и вытянутых галактик.

I. Введение.

До недавнего времени о вращении эллиптических галактик знали очень мало и считалось, что аналитические самосогласованные модели (Готт, 1975; Вилсон, 1975; Ларсон, 1975) в первом приближении правильно отражают динамическое состояние этих систем. Предполагалось, в частности, что модели имеют такую зависимость сплюснутости от вращения, какая существует в галактиках. Недавние измерения вращения у эллиптических галактик (см. Иллингворт, 1977 и цитированную там литературу) показали, что величина этого вращения мала и недостаточна для создания наблюдаемой степени сжатия. Стало ясно, что сжатие эллиптических галактик прямо не связано с их вращением, а вызвано другой причиной.

В качестве этой причины сжатия была предложена идея остаточной анизотропии дисперсии скоростей звезд (Бинни, 1976), удачно вписывающаяся в картину динамики бесстолкновительных систем и эллиптических галактик в частности. Резюмируя, можно сказать, что сплюснутость эллиптических галактик отражает существование анизотропии дисперсии скоростей. Но исследование моделей с анизотропией наталкивается на трудности, носящие математический характер. Так, для моделей с осесимметричным потенциалом фазовая функция распределения, задающая анизотропию, зависит, помимо двух известных интегралов движения-энергии и момента импульса, от неизвестного, вообще говоря, третьего интеграла. Нельзя применить в данном случае и результаты детально исследованных в звездной динамике моделей с эллипсоидальным (или иным анизотропным) распределением скоростей. Все дело в локальном характере анизотропии дисперсии скоростей, задаваемого эллипсоидальным

распределением, а эта локальность не создает, вообще говоря, глобальной анизотропии дисперсии скоростей. Но именно глобальная анизотропия необходима для создания сплюснутости галактик.

Применив тензорную теорему вириала к эллипсоидальным системам, Бинни (1978) исследовал динамику сжатого и вытянутого сфероидов (о вращении вытянутого вокруг короткой оси). Метод позволил исследовать модели с глобальной анизотропией дисперсии скоростей, не решая трудной математической задачи нахождения фазовой функции распределения. Из сравнения результатов исследования моделей с наблюдениями Бинни заключил, что наиболее вероятна вытянутая форма эллиптических галактик.

В данной статье, используя тензорные соотношения (Робертс, 1962), найдена динамическая связь между "сжимаемыми" (в данном случае бесстолкновительными) и хорошо изученными несжимаемыми фигурами. Отношение энергии вращения к гравитационной энергии для данной фигуры зависит только от сжатия, но не зависит от распределения плотности, если только она постоянна на подобных эллипсоидальных поверхностях и распределение скоростей сферически изотропно. Этот вполне общий результат позволил (раздел 2) независимым от Бинни (1978) способом показать необходимость учета глобальной анизотропии дисперсии скоростей в динамике эллиптических галактик. В качестве вытянутой исследована модель трехосного эллипсоида, являющаяся более общей, чем принятый в упомянутой работе вытянутый сфероид. В разделе 3 тензорная теорема (Бинни, 1978) используется для количественного учета роли анизотропии; найденная величина последней в 3-5 раз меньше полученной им. Приводятся динамические аргументы в пользу существования

как сжатых, так и трехосных эллиптических галактик (раздел 4).

2.1. Соотношение $\frac{T_{rot}}{|W|}$ для сжатого сфероида.

Для последовательности твердотельно вращающихся осесимметричных тел справедливо соотношение (Чандрасекхар и Лебовиц, 1962)

$$\Omega^2 \mathcal{I}_{ii} = W_{33} - W_{ii} \quad (I)$$

где \mathcal{I}_{ij} есть тензор инерции и W_{ij} - тензор потенциальной энергии. Для неоднородных эллипсоидов с распределением плотности

$$\rho = \rho(m^2), \text{ где } m^2 = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 \leq 1 \quad (2)$$

компоненты тензоров имеют вид (Роберто, 1962)

$$W_{ij} = -\pi^2 G a_i^4 a_k^2 a_l^2 A_i \delta_{ij} \int_0^1 [F(m^2)]^2 dm, \quad (3)$$

$$\mathcal{I}_{ij} = 2\pi a_i^3 a_k a_l \delta_{ij} \int_0^1 m^2 F(m^2) dm, \quad (4)$$

$$F(m^2) = \int_{m^2}^1 \rho(m^2) dm^2 \quad (5)$$

где

$$A_i = \int_{(a_i^2+u)\Delta}^{\infty} \frac{du}{(a_i^2+u)\Delta}; \quad \Delta = (a_i^2+u)(a_j^2+u)(a_k^2+u). \quad (6)$$

Для того, чтобы получить выражение для угловой скорости вращения неоднородного сжатого сфероида ($a_1 = a_2 > a_3$, $e = \sqrt{1 - (a_3/a_2)^2}$)

вокруг оси a_3 , подставим (3) и (4) в соотношение (I), получим (Роберто)

$$\Omega^2 = \pi G \Phi(e) \frac{\int_0^1 [F(m^2)]^2 dm}{\int_0^1 m^2 F(m^2) dm}, \quad (7)$$

где

$$\Phi(e) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^3} [(3-2e^2)\arcsine e - 3e\sqrt{1-e^2}]. \quad (8)$$

Гравитационная энергия системы согласно (3) равна

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{22} = -\pi^2 G \alpha_3^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \gamma \int_0^1 [F(m^2)]^2 dm, \quad (9)$$

где
$$\gamma = \sum_{i=1}^2 A_i \alpha_i^2. \quad (10)$$

Важной динамической характеристикой является энергия вращения вокруг оси α_3

$$T_{\text{rot}} = \frac{\rho^2}{2} (\gamma_{11} + \gamma_{22}) = \pi \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Omega^2 \int_0^1 m^2 F(m^2) dm. \quad (11)$$

В частном случае неоднородного сжатого сфероида получим иско-
мое соотношение, положив в (9) и (11) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$,

$$t(e) \equiv \frac{T_{\text{rot}}}{|W|} = \frac{2}{\alpha_3 \gamma} \Phi(e), \quad (12)$$

где использовано выражение (7); для γ из (10) легко найти

$$\gamma = \frac{2}{\alpha_1 e} \arcsin e. \quad (13)$$

Отметим, что $t(e)$ из (12) зависит лишь от сплюснутости сфероида и не зависит от распределения плотности в нем. Ниже будет показано, что для трехосных систем имеет место то же свойство. Этот факт является важным, поскольку им устанавливается связь между фигурами равновесия несжимаемой жидкости и "сжимаемыми" системами. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

График функции 12 изображен на рис.1.

2.2. Соотношение $\frac{T_{rot}}{W}$ для трехосных систем.

Чтобы получить угловую скорость вращения для трехосных эллипсоидов $a_1 > a_2 > a_3$, имеющих распределение плотности (2), воспользуемся виримальным уравнением (Чандрасекхар, 1973)

$$W_{11} + \Omega^2 J_{11} = W_{22} + \Omega^2 J_{22}. \quad (14)$$

Подставив в него (3) и (4) и прибавив к обеим частям

$\pi^2 G a_1^2 a_2^2 A_{11} \int_0^1 F(m)^2 dm$, получим (при условии $\alpha_1 \neq \alpha_2$)

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \pi G a_1 a_2 a_3 (A_1 - \alpha_1^2 A_{11}) \frac{\int_0^1 F(m)^2 dm}{\int_0^1 m^2 F(m)^2 dm}, \quad (15)$$

где A_1 и Δ даются (6), а A_{11} введена Чандрасекхаром

$$A_{11} = \int_0^1 \frac{du}{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)\Delta}. \quad (16)$$

Связь между α_1/α_2 и a_1/a_2 та же, что для эллипсоидов Якоби

$$\alpha_1^2 a_2 A_{11} = \alpha_1^2 A_3. \quad (17)$$

Для нахождения T_{rot}/W поступим как в разделе 2.1, но возьмем

Ω^2 из (15). Чтобы не вычислять сложное выражение $A_1 - \alpha_1^2 A_{11}$ запишем $t(e)$ в форме, позволяющей воспользоваться табличными данными (Чандрасекхар, 1973, стр.123)

$$t(e) = \frac{1}{8} \Omega^2 \cdot \frac{1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)} \cdot \frac{e}{F(\varphi, k)}, \quad (18)$$

где $F(\varphi, k)$ - неполный эллиптический интеграл I-го рода, а

$$\varphi = \arccos \frac{\alpha_1}{a_1}; \quad k = \frac{\sqrt{1 - (a_2/a_1)^2}}{e}. \quad (19)$$

Значения $\Omega^2, (a_1/a_2), (a_2/a_1)$ берутся прямо из указанной таблицы. График формулы (18) изображен на рис.1. Так-как при выводе (18) использована формула (17), справедливая в области существования

эллипсоидов Якоби ($\xi = 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \geq 0,42$), график для неоднородного эллипсоида также изображен при $\xi \geq 0,42$.

Важно отметить, что $t \equiv \frac{T_{rot}}{W}$ из (18) не зависит от распределения плотности и определяется только сплюснутостью системы. В разделе 2.1 получен тот же результат для сжатого сфероида. Соотношения (12) и (18) верны и в частном случае однородных, несжимаемых систем. Таким образом, установлена связь между хорошо изученными фигурами равновесия несжимаемой жидкости (сфероидом Маклорена и эллипсоидом Якоби) и "сжимаемыми" неоднородными системами, имеющими поверхности равной плотности в виде подобных эллипсоидов. Она заключается в том, что важная динамическая характеристика $\frac{T_{rot}}{W}$ определяется в обоих случаях только формой фигуры и ее сплюснутостью. Эта простая аналогия позволит нам (см. раздел 2.3) подтвердить важный результат, относящийся к эллиптическим галактикам (Бинни, 1978) - необходимость существования в них глобальной анизотропии дисперсии скоростей, а также сделает понятной общность применения критерия устойчивости (см. раздел 5).

2.3. Соотношение для $\frac{v_{rot}}{\sigma}$.

Из наблюдений эллиптических галактик известны: ϕ - спроектированная на луч зрения дисперсия случайных скоростей, и v_{rot} - максимальное значение скорости вращения. Считая распределение скоростей изотропным и ϕ однородной по телу галактики, можно оценить полную энергию хаотического движения звезд $T_{rand} = \frac{M\phi^2}{2}$ (M - полная масса системы). Энергия вращения равна $T_{rot} = \frac{1}{2} M v_{rot}^2 \alpha^2$, где $\alpha^2 < 1$ вследствие того, что берется максимальная наблюдаемая скорость вращения.

Коэффициент α^2 можно оценить из анализа типичной кривой вращения эллиптической галактики (Приложение 2).

Для упрощенных расчетов будем считать, что кинетическая энергия галактики состоит из энергии вращения и энергии хаотического движения. Теорема вириала имеет вид:

$$|W| = 2T_{rot} + Mb^2, \quad (20)$$

откуда

$$t(e) \equiv \frac{T_{rot}}{|W|} = \frac{T_{rot}}{2T_{rot} + Mb^2}.$$

Подставляя сюда $T_{rot} = \frac{1}{2} M v_{rot}^2 \alpha^2$, найдем:

$$\frac{v_{rot}}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{t(e)}{0.5 - t(e)} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Выше отмечалось, что $t(e)$ (формулы (12) и (18)) не зависит от распределения плотности вида (2) и от угловой скорости твердотельного вращения. Тем же свойствами обладает $\frac{v_{rot}}{b}$, что легко видеть из формулы (21). Аналогичный результат отметил Бинни, 1978 (см. ниже формулу (1')).

При выводе (21) предполагалась изотропия дисперсии скоростей звезд, и справедливость этого физически важного условия можно проверить, сравнив результаты наблюдений $\frac{v_{rot}}{b}$ (зависимость по этой формуле. На рис. 2 крестиками нанесены данные наблюдений для 14 галактик (в основном, по работе Иллингворт, 1977). Даже учитывая некоторую неопределенность, с которой эти данные получены, сравнение с теоретическими кривыми ясно показывает: в предположении изотропии дисперсии скоростей ни вытянутая, ни тем более сплюснутая модели наблюдениям не удовлетворяют. Этот принципиально важный для понимания динамики эллиптических галактик вывод пер-

вым отметил Бинни (1978). Но метод у него другой: используя тензорную теорему вириала, он получил формулу (см. также рис.2):

$$\frac{v_{tot}}{b} = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 + \frac{1}{2} Q_3}{1 - (3A_3 \alpha_3 / \gamma)} - 1 - \frac{1}{2} Q_1 \right) \right]^{-1/2}, \quad (I^*)$$

включающую изотропный случай как частный при $Q_3 = Q_1 = 0$. Отметим, что в этом случае (I*) не сводится к формуле (2I); несоответствие объясняется некоторыми неточностями вывода (I*). Замечания о методе Бинни приведены в разделе 3, там же получена формула для $\frac{v_{tot}}{b}$, которая в случае изотропии сводится к (2I). Резюмируя, отметим, что независимым от Бинни методом (опирающимся на связь между "сжимаемыми" и однородными несжимаемыми фигурами) установлена необходимость глобальной анизотропии для обеих моделей эллиптических галактик.

3. Учет анизотропии дисперсии скоростей.

Для количественного учета анизотропии дисперсии скоростей Бинни (1978) применял тензорную теорему вириала и использовал тензорные соотношения (3). Основная идея метода заключается в представлении тензора внутренней энергии \mathcal{P}_{ij} в виде суммы

$$\mathcal{P}_{ij} = \pi \cdot \delta_{ij} + \tilde{\mathcal{P}}_{ij}, \quad (II^*)$$

где $\pi = \frac{1}{3} (\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{33})$ составляет 2/3 полной внутренней энергии хаотического движения звезд. На этот изотропный энергетический фон накладывается определенная анизотропия, описываемая тензором $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}$ с требованием замкнутости: $\tilde{\mathcal{P}}_{11} + \tilde{\mathcal{P}}_{22} + \tilde{\mathcal{P}}_{33} = 0$. Как составляется тензор $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}$, показано в Приложении I; там же получено основное соотношение излагаемого метода:

$$\frac{2(T_{11}+T_{22})+3\pi}{2(T_{11}+T_{22})-3\tilde{\pi}} = \frac{v_{11}^2+V_{22}+V_{33}}{V_{11}+V_{22}-2V_{33}}, \quad (\text{Ш}^*)$$

где T_{ij} - тензор кинетической энергии упорядоченного движения.

Еинни пренебрегает токами вещества вдоль оси A_3 и полагает $T_{33} = 0$, а $T_{11}+T_{22}$ приравнивает энергии вращения $\frac{1}{2}Mv_{\text{rot}}^2$.

В данной статье мы примем, в соответствии со смыслом π равенство $3\pi = Mb^2$, а не $\pi + \tilde{\pi}_{11} = Mb^2$, как полагает Еинни (что и приводит к неточности (I^{*})). Подставляя $T_{11} = \frac{1}{2}Mv_{\text{rot}}^2 \cos^2 \alpha = T_{11} + T_{22}$ в (Ш^{*}) и используя (3), получим искомое соотношение:

$$\frac{v_{\text{rot}}}{b} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1 - (3A_3 a_3^2 / \mathcal{J})}{Q_3 - Q_1 + (3A_3 a_3^2 / \mathcal{J})} \right)^{1/2}, \quad (22)$$

где \mathcal{J} , A_3 даются формулами (10), (6) а коэффициенты анизотропии

$$Q_3 = \frac{\tilde{\pi}_{33}}{T_{11}+T_{22}}, \quad Q_1 = -\frac{\tilde{\pi}_{11}}{T_{11}+T_{22}}. \quad (23)$$

Оставлены обозначения оригинальной статьи. В отличие от (22),

где $\frac{v_{\text{rot}}}{b}$ зависит от $Q_3 - Q_1$, в (I^{*}) результат зависит от иного сочетания Q_3 и Q_1 . Физически более приемлема зависимость от $Q_3 - Q_1$, как в (22). Формула (22) при $Q_3 - Q_1 = 0$

сводит я, как и следовало ожидать, к (21). В этом можно убе-

диться на случае сжатого сфероида: нужно подставить (12) в фор-

мулу (21), а в (22) формулы (13) и $A_3 = \frac{2}{a_1^2 e^2} \left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} - \text{atc} \right)$

из (6). На рис.3 изображены графики формулы (22); для подгонки

результатов наблюдений взяты значения $Q_3 - Q_1$: для моделей

сжатого сфероида I,7, и для трехосного эллипсоида I. В то же

время величина анизотропии для подгонки наблюдений по (I^{*}) в

3-5 раз выше: $Q_3 = 2$ и $Q_1 = -1$ для сжатых, $Q_3 = 1$ и $Q_1 = -2$

для вытянутых сфероидов. Впрочем, это расхождение легко видеть и по рис.2: изотропные кривые (I^M) лежат выше графиков формулы (21). С точки зрения отыскания реального механизма образования анизотропии дисперсии скоростей в галактиках описанное расхождение коэффициентов Q_3 и Q_1 существенно.

Для учета поправок за существование токов вещества T_3 , нужно иметь самосогласованную модель, но как показал Бинни, поправки малы и сделанные выводы не изменяют.

4.1. Динамические предпосылки существования сжатых и вытянутых эллиптических галактик.

До сих пор пытались (см. например Бинни (1978)) выбрать между сжатой и вытянутой возможными формами галактик. Однако можно отыскать наблюдательные тесты (Кондратьев и Озерной, 1978), указывающие на существование обеих форм. Если наблюдения в дальнейшем подтвердят существование двух форм галактик, это сыграет важную роль в понимании условий их образования. Кроме наблюдательных, за существование двух возможных форм галактик можно привести некоторые динамические аргументы.

Предположим, что в области истинных сжатий $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ эллиптические галактики имеют форму сжатых сфероидов, а в области $\epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$ - вытянутую форму (вращение вокруг короткой оси). Это предположение опирается на аналогию с фигурами равновесия несжимаемой жидкости: для сфероидов Маклорена при $\epsilon_0 = 0,417$ существует точка бифуркации с последовательностью эллипсоидов Якоби. Рассмотрим, носят ли принципиальный характер

основные возражения против такой аналогии:

- а) неоднородность эллиптических галактик,
- б) дифференциальность вращения галактик, в то время как у фигур несжимаемой жидкости оно твердотельное,
- с) в галактиках возможно существование систематических токов вещества.

Как установил Робертс (1962), для конфигураций с постоянной плотностью на подобных сфероидальных поверхностях и твердотельным вращением положение точки бифуркации с трехосными системами не зависит от вида распределения плотности, т.е. $\mathcal{E}_0 = 0,417$ как для однородных фигур. Робертс показал, что в условии для существования точки бифуркации осесимметричных фигур

$$W_{33} - W_{22} = W_{12;12} \quad , \quad (24)$$

(где W_{ij} - тензор потенциальной энергии, а $W_{12;12}$ - момент от тензорного потенциала) правая и левая части одинаково зависят от распределения плотности (2). Решая (24) относительно e (эксцентриситет), получим $e_0 = 0,8127$ или $\mathcal{E}_0 = 1 - \sqrt{1 - e_0^2} = 0,417$. Приведенное доказательство снимает возражение (а).

Далее, необходимо различать вращение конфигурации как твердого тела и возможные в ней вихревые токи вещества. Центральные области эллиптических галактик обнаруживают твердотельное враще-

х) Видимая сплюснутость изофот меняется от центра к краю (Тулио, 1978), поэтому для галактик значение \mathcal{E}_0 может отличаться от канонического.

ние, а отклонения от него во внешних частях можно объяснить вихревыми токами, представление о которых дает модель Фримана (1966). Существование вихревых токов в эллиптических галактиках делает их похожими на эллипсоиды Римана - последовательностями фигур, имеющих твердотельное вращение $\vec{\omega}$ и внутренние вихревые движения \vec{v} ; для каждой последовательности отношение $\ell = \xi/\Omega$ постоянно. Сфероид Маклорена можно рассматривать как эллипсоид Римана, имеющего определенные значения $\vec{\omega}$ и \vec{v} (Чандрасекхар, 1973). Таким образом, приведенные возражения (a), (b), (c) не носят принципиального характера против возможного существования обеих форм эллиптических галактик.

5. Заключение.

Рассмотрены динамические свойства возможных моделей эллиптических галактик - сфероида и трехосного эллипсоида. Сравнивая результаты расчетов с имеющимися наблюдательными данными о динамике реальных галактик можно заключить, что их сферичность отражает существование анизотропии дисперсии скоростей независимо от того, сжатые или вытянутые они по форме. Отмеченная связь между "сжимаемыми" и несжимаемыми фигурами делает понятным также общность формулировки критерия устойчивости (Пиблс и Острайкер, 1973): для любых осесимметричных гравитирующих тел (как для жидких, так и "сжимаемых" - бесстолкновительных или газовых) условие устойчивости определяется требованием $t = T_{rot}/|W| \leq 0,14$. В заключении заметим, что особый интерес вызывает механизм происхождения глобальной анизотропии дисперсии скоростей, исследование которого дало бы возможность

глубже понять происхождение эллиптических галактик. В связи с этим, может иметь значение величина анизотропии, найденная выше в 3-5 раз меньшей, чем у Египти.

Выражаю благодарность Л.М.Оверному за постоянное и полезное обсуждение вопросов, затронутых в данной статье.

Приложение I.

Следя Бинни, (1978), получим соотношение (Π^K) из раздела 3. Исходным является уравнение (Чандрасекхар, 1973):

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{I}_{ij} = 2T_{ij} + W_{ij} + \Pi_{ij}, \quad (I)$$

где

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int \rho \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle d^3x, \quad (2)$$

$$W_{ij} = - \int \rho x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d^3x, \quad (3)$$

$$\Pi_{ij} = \int \rho \langle u_i - \langle u_i \rangle \rangle \langle u_j - \langle u_j \rangle \rangle d^3x, \quad (4)$$

$$\mathcal{I}_{ij} = \int \rho x_i x_j d^3x. \quad (5)$$

φ - гравитационный потенциал, T_{ij} - тензор кинетической энергии упорядоченного движения, W_{ij} - тензор потенциальной энергии,

Π_{ij} - тензор энергии хаотического движения. Пусть система вращается вокруг оси a_3 с постоянной угловой скоростью Ω , и собственные оси конфигурации совпадают с осями данной системы координат (ось 2 - наибольшая). Согласно формуле преобразования

$$\mathcal{I}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Беря производные и полагая $t=0$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{I}_{ij} = \Omega^2 \begin{pmatrix} \delta \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\delta \mathcal{I} = \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1 > 0$.

Сравнивая (6) с (I), имеем

$$\Omega^2 \delta \mathcal{I} = 2T_{11} + W_{11} + \Pi + \tilde{\Pi}_{11}, \quad (7)$$

$$-\Omega^2 \delta \gamma = 2T_{12} + W_{22} + \pi + \tilde{\pi}_{22}, \quad (8)$$

$$0 = 2T_{33} + W_{33} + \pi + \tilde{\pi}_{33}. \quad (9)$$

Представлено $\pi_{ij} = \pi \delta_{ij} + \tilde{\pi}_{ij}$ (см. раздел 3) и полагается $T_{33} = 0$. Складывая (7) и (8) и исключая π с помощью (9), находим

$$2(T_{11} + T_{22}) - 3\tilde{\pi}_{33} = -(W_{11} + W_{22} - 2W_{33}). \quad (10)$$

Складывая (7), (8), (9), получаем скалярную теорему вириала

$$2(T_{11} + T_{22}) + W_{11} + W_{22} + W_{33} + 3\pi = 0. \quad (11)$$

Искомое соотношение следует из (10) и (11)

$$\frac{2(T_{11} + T_{22}) + 3\pi}{2(T_{11} + T_{22}) - 3\tilde{\pi}_{33}} = \frac{W_{11} + W_{22} + W_{33}}{W_{11} + W_{22} - 2W_{33}}. \quad (12)$$

Приложение 2.

Чтобы оценить $\alpha^2 = \left(\frac{\bar{v}}{v_{\max}} \right)^2$,

где

$$\bar{v} = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} v(\tau) d\tau \quad \text{— среднее значение скорости вращения,}$$

$$v_{\max} \quad \text{— амплитуда кривой вращения,}$$

возьмем данные о NGC 4697 (Бертола и Капаччиоли, 1975). Исходя из приведенной там кривой вращения, легко найти вычислением площади под ней $\alpha^2 \approx 0,72$. Пример другой галактики NGC 4473 (Янг и Саргент, 1978) дает величину $\alpha^2 \approx 0,83$.

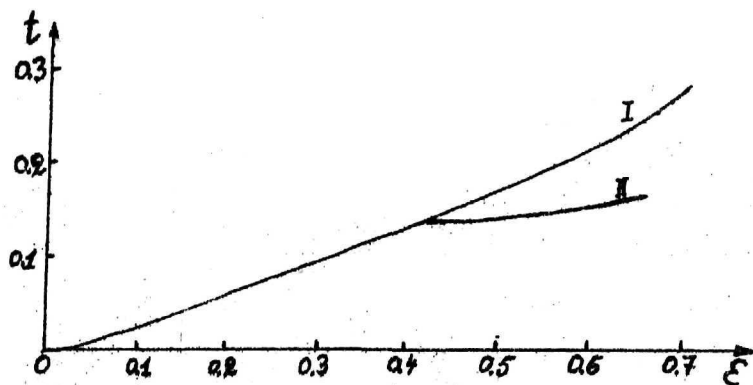


Рис. I. $t = T_{\text{ли}}/W$ для сжатых (график I) и трехосных (II) моделей.

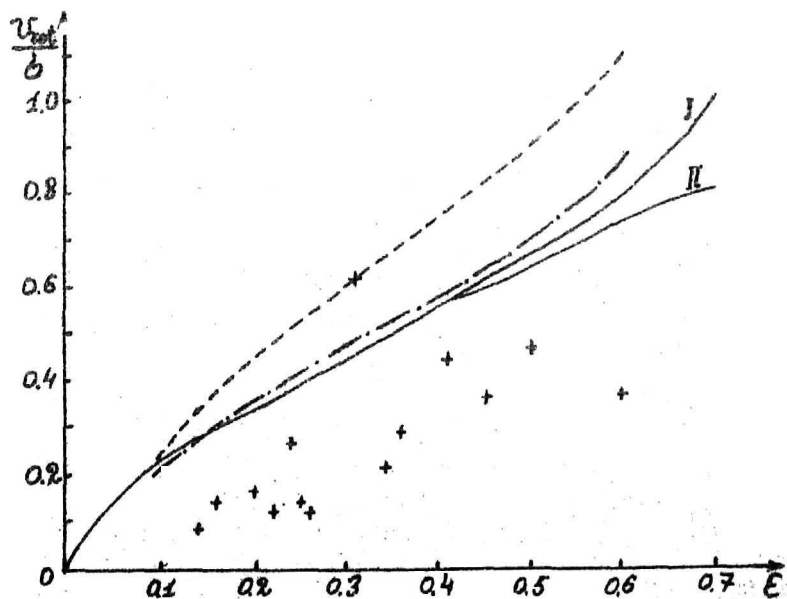


Рис.2. v_{rel}/δ для сжатых (I) и трехосных (II) изотропных моделей. Величина $\mathcal{L}^2 = 0,72$. Приведены (для сравнения) графики (I*) для сжатых (пунктир) и вытянутых (точка-тире) сфероидов. v_{rel}/δ умножены на проектировочный фактор: для сжатых $p = 0,785$, для вытянутых в интервале $0,81, 0,95$. Крестики - данные наблюдений 14 галактик.

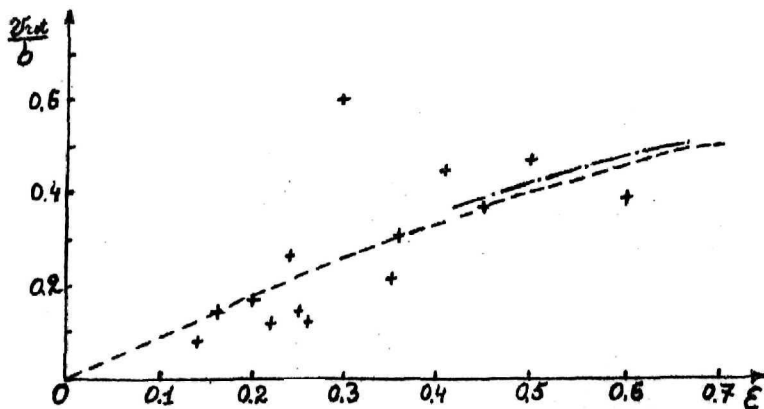


Рис.3. $\frac{v_{tot}}{b}$ для сжатых (пунктир) и трехосных (точка-тире) моделей. Величина анизотропии: $Q_3 - Q_1 = 1,7$ для сжатых и $Q_3 - Q_1 = 1$ - для трехосных. Все v_{tot} умножены на фактор проекции. Крестики - данные наблюдений 14 галактик.

Литература

Бинни(Binney J.J.), 1976, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, 172, 19.

~~Бинни~~(Binney J.J.), 1978, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, 183, 501.

Бертола и Капаччиоли(Bertola F., Capaccioli M.), 1975, *Astrophys. J.*,
200, 439.

Вилсон(Wilson C.P.), 1975, *Astron. J.*, 80, 175.

Готт(Gott I.R.), 1975, *Astrophys. J.*, 201, 296.

Иллингворт(Illingworth G.), 1977, *Astrophys. J.*, 211, L43.

Ларсон(Larson R.B.), 1975, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, 173, 671.

Озерной Л.М., Кондратьев Б.П., Готовится для опубликования в
журнале "Письма в АИ".

Пиблс и Острайкер(Ostriker J.P., Peebles P.J.E.), 1973, *Astrophys. J.*,
186, 467.

Робертс(Roberts P.H.), 1962, *Astrophys. J.*, 136, 1108.

Туллио(Tullio G.), 1978, *Astron. and Astrophys.*, 62, L17.

Фриман(Freeman K.C.), 1966, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, 134, 1.

Чандрасекхар и Лебовиц(Chandrasekhar S., Lebovitz M.), 1962,
Astrophys. J., 136, 1037.

Чандрасекхар, С., "Эллипсоидальные фигуры равновесия", "Мир",
М., 1973.

Янг и Саргент(Yong P., Sargent W.L.W.), 1978, *Astrophys. J.*,
222, 450.

Т - 15786

Подписано в печать 25 августа 1978 года

Заказ № 444. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ротационте в ФИАИ СССР

Москва В-312, Ленинский проспект, 53